

Τελική Εξέταση-Απειροστικός Λογισμός II, 27/9/2019

Διδάσκοντες: Ελευθέριος Νικολιδάκης-Χρήστος Σαρόγλου
Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση δεν βαθμολογούνται.

Θέμα 1ο.

- i) [0.7 μον.] Έστω $\{a_n\}$ μία ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, δείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Το αντίστροφο ισχύει;
- ii) [1.0 μον.] Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin(1/n))^2$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.
- iii) [0.8 μον.] Να βρεθούν όλα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n}$ συγκλίνει.

Θέμα 2ο.

- i) [1.0 μον.] Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ δύο ομοιόμορφα συνεχείς και φραγμένες συναρτήσεις. Ναδειχθεί ότι και το γινόμενο τους είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.
- ii) [1.0 μον.] Ναδειχθεί ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς

$$f(x) = \frac{\ln x}{x-1}, \quad x \in (1, 2), \quad g(x) = \sin x + \sqrt{x}, \quad x \in [0, \infty).$$

Θέμα 3ο. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση.

- i) [1.0 μον.] Αν η f έχει τύπο $f(x) = \begin{cases} 3/2, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ -1/4, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1] \end{cases}$, να εξεταστεί αν η f είναι ολοκληρώσιμη.
- ii) [0.75 μον.] Για $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε τη διαμέριση $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ του $[0, 1]$. Αν η f είναι αύξουσα, ναδειχθεί ότι
- $$U(f, P_n) = \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f(1) \right).$$
- iii) [0.75 μον.] Έστω ότι η f είναι αύξουσα. Βρείτε έναν ανάλογο τύπο για το $L(f, P_n)$ και αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

Θέμα 4ο.

- i) [0.5 μον.] Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε οι f' και g' να είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Ναδειχθεί ότι

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = - \int_a^b f(x)g'(x)dx + [f(b)g(b) - f(a)g(a)].$$

- ii) [1.0 μον.] Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{dx}{(x+2)(x-5)^2} dx, \quad \int_1^2 x^3 \ln x dx, \quad \int \cos^4(2x) dx.$$

- iii) [0.5 μον.] Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^2+3} dx$.

Θέμα 5ο. [2.0 μον.] Αν $f(x) = \sin(3x)$, $x \in \mathbb{R}$, βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_n(x) = T_{n,f,0}(x)$ της f , τάξης n με κέντρο το 0. Βρείτε επίσης μία έκφραση για το αντίστοιχο υπόλοιπο Taylor $R_n(x) = R_{n,f,0}(x)$ (τάξης n με κέντρο το 0). Τέλος, δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$